3. Linearna nezavisnost

(3.01) Linearna nezavisnost

Za skup vektora $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ kažemo da je *linearno nezavisan skup* kadgod je jedino rješenje homogene jednačine

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + ... + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

za skalare α_i trivijalno rješenje $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Ako postoji netrivijalno rješenje za α-e (tj. najmanje jedan $\alpha_i \neq 0$) date homogene jednačine, skup $\mathcal{S}$ je *linearno zavisan skup*. Drugim riječima, linearno nezavisni skupovi su oni koji ne sadrže zavisne relacije, i linearno zavisni skupovi su oni skupovi u kojima je najmanje jedan vektor kombinacija svih osalih. Po dogovoru prazan skup je uvijek linearno nezavisan. ◇

(3.02) Linearna nezavisnost i matrice

Neka je A $m \times n$ matrica.

(i) Svaka od sljedećih tvrdnji je ekvivalentna tvrđenju da kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup.

▷ $ker(A) = \{\mathbf{0}\}$.

▷ $rang(A) = n$.

(ii) Svaka od sljedećih tvrdnji je ekvivalentna tvrđenju da redovi matrice A formiraju linearno nezavisan skup.

▷ $ker(A^\top) = \{\mathbf{0}\}$.

▷ $rang(A) = m$.

(iii) Kada je A kvadratna matrica, svaka od sljedećih tvrdnji je ekvivalentna tvrđenju da je A nesingularna.

▷ Kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup.

▷ Redovi matrice A formiraju linearno nezavisan skup. ◇

(3.03) Najveći nezavisi podskupovi

Ako je $rang(A_{m\times n}) = r$, tada vrijede sljedeće tvrdnje:

(i) Najveći nezavisni podskup kolona koji se može izvući iz A sadrži tačno r kolona.

(ii)Najveći nezavisni podskup redova koji se može izvući iz A sadrži tačno r redova.

(iii) Među ostalim mogućnostima za odabir, r osnovnih kolona iz A sadrže jedan najveći nezavisni podskup kolona iz A. ◇

(3.04) Osnovne tvrdnje o nezavisnosti

Za neprazan skup vektora $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n\}$ u vektorskom prostoru $\mathcal{V}$, sljedeće tvrdnje su tačne.

(i) Ako $\mathcal{S}$ sadrži linearno zavisan podskup, tada i sam $\mathcal{S}$ mora biti linearno zavisan.

(ii) Ako je $\mathcal{S}$ linearno nezavisan, tada je i svaki podskup od $\mathcal{S}$ također linearno nezavisan.

(iii) Ako je $\mathcal{S}$ linearno nezavisan i ako je $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$, tada *produženi skup* $\mathcal{S}_{prod} = \mathcal{S} \cup \{\boldsymbol{v}\}$ je također linearno nezavisan ako i samo ako $\boldsymbol{v} \notin span(\mathcal{S})$.

(iv) Ako je $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^m$ i ako je $n > m$, tada $\mathcal{S}$ mora biti linearno zavisan. ◇

(ova stranica je ostavljena prazna)

(#) Odrediti da li je dati skup linearno nezavisan. Ako je linearno zavisan, napisati jedan od vektora kao linearnu kombinaciju ostalih:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\5\\9\end{pmatrix}\right\}.$$

Rj: Skup vektora $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix}1\\5\\9\end{pmatrix}\right\}$ je prema definiciji linearno nezavisan akko jedino rješenje homogenog sistema

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\5\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

je trivijalno rješenje $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.

Dati sistem možemo napisati u obliku

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&5\\3&0&9\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Problem linearne nezavisnosti skupa sad možemo svesti na problem da li je matrica A nesingularna ili na problem ranga matrice A. (prema definiciji A je nesingularna akko $\exists A^{-1}$).

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&5\\3&0&9\end{pmatrix}\underset{III_v-I_v\cdot 3}{\overset{II_v-I_v\cdot 2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-3&3\\0&-6&6\end{pmatrix}\underset{III_v:(-6)}{\overset{II_v:(-3)}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}\overset{III_v+II_v\cdot(-1)}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{I_v+II_v}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}=E$$

E je red ešelon oblik matrice A

$\operatorname{rang}(A)=2$

Dati skup je linearno zavisan

Iz $E_A \Rightarrow$
$$\begin{aligned}\alpha_1+3\alpha_2&=0 &&\Rightarrow \alpha_1=-3\alpha_2\\ \alpha_2-\alpha_3&=0 &&\Rightarrow \alpha_3=\alpha_2\end{aligned}$$

$$-3\alpha_2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\5\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad /:\alpha_2$$

$$\begin{pmatrix}1\\5\\9\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

treći vektor kao linearna kombinacija preostala dva

\# Odrediti da li je sljedeći skup matrica linearno nezavisan skup

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Rj. Prema definiciji linearne nezavisnosti dati skup matrica će biti linearno nezavisan akko jedino rješenje homogene jednačine

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je trivijalno rješenje $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Datu homogenu jednačinu možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_4 &= 0 \end{aligned}.$$

Nije teško vidjeti da će jedino rješenje sistema biti trivijalno rješenje $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ tj. dati skup matrica je linearno nezavisan skup.

Odrediti da li je dati skup linearno nezavisan:

$$\{(1\ \ 2\ \ 3),\ (0\ \ 4\ \ 5),\ (0\ \ 0\ \ 6),\ (1\ \ 1\ \ 1)\}.$$

U slučaju linearne zavisnosti napisati jedan vektor kao linearnu kombinaciju ostalih.

Rj: Dati skup vektora je prema definiciji linearno nezavisan akko jedino rješenje homogenog sistema

$$\alpha_1(1\ \ 2\ \ 3)+\alpha_2(0\ \ 4\ \ 5)+\alpha_3(0\ \ 0\ \ 6)+\alpha_4(1\ \ 1\ \ 1)=(0\ \ 0\ \ 0)$$

je trivijalno rješenje $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$. Dati sistem možemo napisati u obliku

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&1\\2&4&0&1\\3&5&6&1\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

pa je dati skup linearno nezavisan akko rang $A=4$.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\2&4&0&1\\3&5&6&1\end{pmatrix}\underset{III_v-I_v\cdot 3}{\overset{II_v-I_v\cdot 2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&4&0&-1\\0&5&6&-2\end{pmatrix}\overset{IV_k\leftrightarrow II_k}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&4\\0&-2&6&5\end{pmatrix}\overset{III_v+II_v\cdot(-2)}{\sim}$$

$$\sim\begin{array}{c}\begin{matrix}\alpha_1&\alpha_4&\alpha_3&\alpha_2\end{matrix}\\\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&4\\0&0&6&-3\end{pmatrix}\end{array}=E$$

E je red ešelon oblik matrice A

$\operatorname{rang}(A)=3$

dati skup je linearno zavisan

$$E\Rightarrow\quad\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_4&=0 &&\Rightarrow \alpha_1=-\alpha_4\\-\alpha_4+4\alpha_2&=0&&\Rightarrow \alpha_2=\tfrac{1}{4}\alpha_4\\6\alpha_3-3\alpha_2&=0&&\Rightarrow \alpha_2=2\alpha_3\end{aligned}\ \Bigg\}\Rightarrow \frac{1}{4}\alpha_4=2\alpha_3,\quad \alpha_3=\frac{1}{8}\alpha_4$$

Prema tome

$$-\alpha_4(1\ \ 2\ \ 3)+\frac{1}{4}\alpha_4(0\ \ 4\ \ 5)+\frac{1}{8}\alpha_4(0\ \ 0\ \ 6)+\alpha_4(1\ \ 1\ \ 1)=(0\ \ 0\ \ 0)\qquad /:\alpha_4$$

$$(1\ \ 2\ \ 3)=\frac{1}{4}(0\ \ 4\ \ 5)+\frac{1}{8}(0\ \ 0\ \ 6)+(1\ \ 1\ \ 1)$$

ovaj zadatak ostavi za vježbu

Odrediti da li je skup $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}\right\}$

linearno nezavisan. U slučaju linearne zavisnosti jedan od vektora izraziti kao linearnu kombinaciju ostala dva.

Rj. Mi u stvari želimo ispitati da li postoji netrivijalno rješenje homogenog sistema

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

u kome su α-te nepoznate, ili drugim riječima da li postoji rješenje homogenog sistema

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&5\\2&0&6\\1&2&7\end{bmatrix}}_{=A}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Svedimo matricu A u red ešelon oblik

$$A=\begin{bmatrix}1&1&5\\2&0&6\\1&2&7\end{bmatrix}\overset{I_k\leftrightarrow II_k}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&5\\0&2&6\\2&1&7\end{bmatrix}\overset{III_v-I_v\cdot 2}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&5\\0&2&6\\0&-1&-3\end{bmatrix}\overset{II_v\leftrightarrow III_v}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&5\\0&-1&-3\\0&2&6\end{bmatrix}\sim$$

$$\overset{III_v+I_v\cdot 2}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&5\\0&-1&-3\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad \text{rang}(A)=2<3$$

$\Rightarrow$ kolone matrice A formiraju linearno zavisan skup

$\Rightarrow$ skup vektora $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}\right\}$ je linearno zavisan

provjera:

$$E_4=\begin{bmatrix}1&1&5\\0&-1&-3\\0&0&0\end{bmatrix}\overset{I_v+II_v}{\sim}\begin{array}{ccc}\alpha_2&\alpha_1&\alpha_3\end{array}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&-1&-3\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\quad\begin{aligned}\alpha_2+2\alpha_3&=0\\-\alpha_1-3\alpha_3&=0\end{aligned}$$

$$\alpha_2=-2\alpha_3$$
$$\alpha_1=-3\alpha_3$$

za $x_3=t \Rightarrow -3t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}-2t\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

ovaj zadatak je za vježbu

(#) Neka je data realna $m\times n$ matrica A čije su kolone linearno nezavisan skup. Dokazati da je $\ker(A)=\{0\}$.

Rj: Prisjetimo se $\ker(A)\overset{def.}{=}\{x \mid Ax=0\}$.

Kolone matrice A označimo sa $A_{*1}, A_{*2}, \ldots, A_{*n}$ tj.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} | & | & & | \\ A_{*1} & A_{*2} & \ldots & A_{*n} \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

Prema definiciji kolone matrice A su linearno nezavisne akko je jedino rješenje homogenog sistema

$$\alpha_1 A_{*1}+\alpha_2 A_{*2}+\ldots+\alpha_n A_{*n}=0$$

je trivijalno rješenje $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$.

Primjetimo da izraz $\alpha_1 A_{*1}+\alpha_2 A_{*2}+\ldots+\alpha_n A_{*n}$ možemo napisati i kao

$$\alpha_1 A_{*1}+\alpha_2 A_{*2}+\ldots+\alpha_n A_{*n}=\begin{bmatrix} A_{*1} & A_{*2} & \ldots & A_{*n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots \\ \alpha_n\end{bmatrix}=A\alpha .$$

Prema tome jedino rješenje homogenog sistema $A\alpha=0$ je trivijalno rješenje $\alpha=\mathbf{0}$.

Ako umjesto vektora $\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ stavimo vektor $x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ imamo

da je jedino rješenje homogenog sistema $Ax=0$ trivijalno rješenje $x=0$ tj.

$$\ker A=\{0\}.$$

q.e.d.

(#) Neka je A realna $m\times n$ matrica. Ako kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup pokazati da je tada $\text{rang}(A)=n$.

Rj. Kolone matrice A označimo sa $A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*n}$ tj.

$A=\begin{bmatrix} | & | & & | \\ A_{*1} & A_{*2} & \cdots & A_{*n} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$. Kako su kolone matrice A linearno nezavisne to znači da je jedino rješenje homogenog sistema

$$\alpha_1 A_{*1} + \alpha_2 A_{*2} + \dots + \alpha_n A_{*n} = 0$$

je trivijalno rješenje $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$. Drugim riječima homogeni sistem $A\alpha=0$ ima jedinstveno rješenje $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$. Iz osnovne teorije linearne algebre znamo

homogeni sistem $Ax=0$ ima jedinstveno rješenje akko $\text{rang}A=n$ gdje je $A_{m\times n}$

Prema tome $A\alpha=0$ ima jedinstv. rješenje $\alpha=0$ tj. $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$

$\Rightarrow \text{rang}A=n$

q.e.d.

(#) Pokazati da ako realna matrica $A_{m\times n}$ ima $\text{rang}(A)=n$ da tada kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup.

(#) Pokazati da ako za realnu matricu $A_{m\times n}$ vrijedi $\ker(A)=\{0\}$ tada kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup.

(#) Posmatrajmo matricu $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Odrediti maksimalan linearno nezavisan podskup kolona matrice A.

b) Odrediti ukupan broj linearno nezavisnih podskupova koji se mogu konstruisati uz pomoć kolona matrice A.

Rj.

a) Sve kolone $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ matrice A će biti linearno nezavisne akko homogeni sistem

$$\alpha_1\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ima tačno jedno rješenje i to je trivijalno rješenje $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$.
Drugim riječima akko homogeni sistem

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ima jedinstveno rješenje. Iz osnovne teorije Linea algebre ~~znamo~~

hom. sist. $A\alpha=0$ ima jedinstv. rješenje akko $\text{rang}(A_{m\times n})=n$ gdje je A $m\times n$ matrica

---

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{III_v+I_v\cdot(-3)}{\overset{II_v+I_v\cdot(-2)}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{III_v+II_v(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{I_v+II_v}{\sim}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=E_A \Rightarrow \text{rang}(A)=2.$$

Prema tome u matrica A nisu linearno nezavisne sve kolone. Maksimalan lin. nez. posk <4

Ako je A_1 matrica formirana od tri proizvoljne kolone dobićemo da je $\text{rang}(A_1)<3 \Rightarrow$ broj elem u maksim lin. nez pod <3.

Iz E_A vidimo da će kolone $\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ biti linearn nezavisne.

Isti rezultat smo mogli postići pozivajući se na osnovnu teoriju iz Linearne algebre

$\underline{\text{rang}(A)=r}$ $\Rightarrow$ $\underline{r \text{ osnovnih kolona u } A \text{ sadrže jedan maksimalan nezavisan podskup kolona iz } A}$

Prema tome jedan maksimalan linearno nezavisan skup kolona matrice A može biti $\mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$.

b) Skupovi kolona koji imaju 3 ili 4 elementa otpadaju, zato što je prema (a) maksimalan broj elemenata 2.

Posmatrajmo skupove sa 2 elementa. Prema matrici E_A skup koji sadrži prve dvije kolone otpada. Ali zato (isto prema E_A) skupovi $\mathcal{S}_1=\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$, $\mathcal{S}_2=\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$, $\mathcal{S}_3=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$, $\mathcal{S}_4=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$ i $\mathcal{S}_5=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$ su linearno nezavisni podskupovi formirani pomoću kolona matrice A.

$\boxed{\text{dio pod b) ostavi za vježbu}}$

Posmatrajmo podskupove sa 1 elementom:

$\mathcal{S}_6=\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\right\}$, $\mathcal{S}_7=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$, $\mathcal{S}_8=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$, $\mathcal{S}_9=\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$

su lineano nezavisni podskupovi form. pomoću kolona matr. A.

Na kraju lin. nez. podskup sa 0 elemenata je $\mathcal{S}_{10}=\emptyset$.

Okupan broj lin. nez. podsk. koji se mogu konstr. uz pomoć kolona <u>matrice A</u> je 10.

Iz osnovne teor. Lin. alg.

$\underline{\text{rang}(A)=r}$ $\Rightarrow$ $\underline{\text{najveći nezavisni podskup kolona}}$ matrice A sadrži tačno r kolona

a) Neka je dat skup $\mathcal{S}=\{0\}$ koji sadrži samo nula vektor. Objasniti zašto $\mathcal{S}$ mora biti linearno zavisan.

b) Objasniti zašto skup koji sadrži nula vektor mora biti linearno zavisan.

Rj.

a) Neki skup $M=\{x\}$ koji sadrži samo jedan element će prema definiciji biti linearno nezavisan akko jedino rješenje jednačine

$$\alpha x = 0$$

je trivijalno rješenje $\alpha = 0$.

Za naš slučaj ($\mathcal{S}=\{0\}$) jednačina

$$\alpha 0 = 0$$

ima netrivijalno rješenje (bilo koje $\alpha \neq 0$) pa je $\mathcal{S}$ linearno zavisan skup.

b) Posmatrajmo skup M koji sadrži nula vektor. Ako skup M ima samo jedan elemenat ($M=\{0\}$) tada je M prema a) linearno zavisan skup.

Ako M ima više od jednog elementa npr. $M=\{0, x_2, \dots, x_n\}$ ($n \geq 2$) tada jednačina

$$\alpha_1 0 + \alpha_2 x_2 + \dots \alpha_n x_n = 0$$

ima netrivijalno rješenje (npr. $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$) pa prema definiciji linearne nezavisnosti slijedi da je skup M linearno zavisan.

(#) Ako je T trougaona matrica u kojoj je svaki $t_{ii} \neq 0$, objasniti zašto redovi i kolone od T moraju formirati linearno nezavisan skup.

Rj. Trougaona matrica je ona matrica čiji su svi elementi ispod ili iznad glavne dijagonale jednaki nuli.

npr.

$$T_1 = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \dots & t_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

Riješimo zadatak za kolone matrice T.
Iz osnovne teorije Linearne algebre znamo

kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup akko $\ker(A) = \{0\}$

$$\ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

Pa posmatrajmo sistem $Ax=0$. Ponovo iz osnovne teorije linearne algebre znamo

Homogeni sistem $Ax=0$ ima jedinstveno rješenje akko $\text{rang}(A) = n = $ broj nepoznatih

Ako je matrica T data u gornje-trougaonom obliku tada je T i u red ešelon obliku pa je $\text{rang}(T) = n = $ broj nepoznatih

$\xRightarrow{\text{sist. ima jedinstv. rj.}} \ker(A) = \{0\} \Rightarrow$ kol. od A form. lin. nez. skup
q.e.d.

Ako je matrica T data u donje-trougaonom obliku tada jednačine iz homogenog sistema $Ax=0$ možemo ispremještati (redove od T možemo ispremještati) pa ćemo opet dobiti $\text{rang}(T) = n = $ broj nepoznatih.

(#) Bez računanja determinante, odrediti da li je sljedeća matrica singularna ili nesingularna:

$$A = \begin{pmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

Rj. Iz osnovne teorije linearne algebre znamo

A nesingularna matrica akko kolone matrice A formiraju linearno nezav. skup

kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup akko $ker(A) = \{0\}$

Pa pokažimo da je $ker(A)=\{0\}$. $(ker(A)=\{x \mid Ax=0\})$.
Pretpostavimo da postoji nenula vektor $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ t.d. $Ax=0$,
i neka je $|x_j|$ najveći elemen u vektoru x.
Posmatrajmo homogeni sistem $Ax=0$ tj. posmatrajmo

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \text{j-ta vrsta} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \text{j-ta kolona} \\ \begin{pmatrix} n & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & n \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ako iz homogenog sistema $Ax=0$ izvučemo j-tu jednačinu imamo

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{j-1} + nx_j + x_{j+1} + \dots + x_n = 0$$

tj. $nx_j = -\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} x_i \Rightarrow |nx_j| = |-\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} x_i|$

$$n|x_j| = |-\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} x_i| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |x_i| \overset{|x_j| \text{ najveća vrijed.}}{\leq} |x_j| \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} 1 = (n-1)|x_j|$$

$\Rightarrow n|x_j| \leq (n-1)|x_j|$
#kontradikcija
$(x_j \neq 0, x\neq 0)$

Pretpostavka da je $ker A \neq 0$ nas vodi u kontradikciju pa nije tačno $\Rightarrow ker A = 0 \Rightarrow$ A nesingularna matrica.

(#) Neka je dat neprazan skup vektora $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ u vektorskom prostoru V. Pokazati da ako S sadrži linearno zavisan podskup, tada S sam mora biti linearno zavisan.

Rj.

Pa pretpostavimo da S sadrži linearno zavisan skup $\{u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}\}$ od k elemenata $(k \leq n)$. Permutirajmo vektore u skupu S tako da je ovaj zavisan skup

$$S_{ZAV} = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$$

Sad prema definiciji linearne zavisnosti, postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ koji nisu svi jednaki nuli, takvi da

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k = 0.$$

Ovo znači da možemo napisati

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k + \underset{\alpha_{k+1}}{\overset{\shortparallel}{0}} \cdot u_{k+1} + \dots + \underset{\alpha_n}{\overset{\shortparallel}{0}} \cdot u_n = 0$$

gdje nisu svi skalari nula. A to u stvari znači da je S linearno zavisan skup.

q.e.d.

(#) Neka je dat neprazan skup vektora $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ u vektorskom prostoru V. Pokazati da ako je S linearno nezavisan skup tada je svaki podskup od S također linearno nezavisan.

Rj.

Pretpostavimo suprotno tvrdnji, tj. pretpostavimo da postoji podskup S_1 skupa S koji je linearno zavisan. Napravimo permutaciju vektora skupa S tako da S_1 sad izgleda

$$S_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}, \quad k \leq n,$$

Kako je S_1 linearno zavisan skup to znači da jednačina

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k = 0 \qquad \ldots (*)$$

ima netrivijalno rješenje (neki od $\alpha_i \neq 0$). Drugim riječima jednačina

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k + \alpha_{k+1} u_{k+1} + \ldots + \alpha_n u_n = 0$$

ima netrivijalno rješenje (možemo staviti da je $\alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_n = 0$, a prema $(*)$ znamo da mora biti $\alpha_i \neq 0$ za neki $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$) pa je S linearno zavisan skup

#kontradikcija

(S je lin. nez. prema pretpostavci)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome svaki podskup od S je linearno nezavisan.

q.e.d

ovaj zadatak ostavi za vježbu

(#) Neka je dat neprazan skup vektora $\mathcal{S}=\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ u vektorskom prostoru V, i neka je $\mathcal{S}$ linearno nezavisan skup. Definišimo prošireni skup $\mathcal{S}_{PROŠ}=\mathcal{S}\cup\{v\}$ gdje je v neki vektor iz V. Pokazati da je $\mathcal{S}_{PROŠ}$ linearno nezavisan skup ako i samo ako $v\notin span(\mathcal{S})$.

Rj.

„$\Leftarrow$" Pretpostavimo da $v\notin span(\mathcal{S})$ i pokažimo da je tada $\mathcal{S}_{PROŠ}$ linearno nezavisan skup.

$v\notin span(\mathcal{S}) \iff$ ne postoji linearna kombinacija vektora iz $\mathcal{S}$ takva da je jednaka v-u tj.

$$\beta_1 u_1+\beta_2 u_2+\dots+\beta_n u_n \neq v \quad \text{za } \forall \beta_i\in\mathbb{R},\ i=1,2,\dots,n. \quad \dots(\square)$$

Posmatrajmo jednačinu $\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\dots+\alpha_n u_n+\alpha_{n+1}v=0$. $\dots(\square\square)$

Ako bi α_{n+1} bila različita od 0. ($\alpha_{n+1}\neq 0$) tada bi vektor v mogli napisati kao linearnu kombinaciju vektora iz $\mathcal{S}$ tj.

$$v=\frac{-\alpha_1}{\alpha_{n+1}}u_1+\frac{-\alpha_2}{\alpha_{n+2}}u_2+\dots+\frac{-\alpha_n}{\alpha_{n+1}}u_n$$

kontradikcija (sa $(\square)$)

Prema tome $\alpha_{n+1}=0 \overset{(\square\square)}{\Longrightarrow} \alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\dots+\alpha_n u_n=0$

$\xrightarrow{\mathcal{S}\text{ lin. nez. skup}} \alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$

Možemo zaključiti $\mathcal{S}_{PROŠ}$ je linearno nezavisan skup

q.e.d.

„$\Rightarrow$" Pretpostavimo sad da je $\mathcal{S}_{PROŠ}$ lin. nez. skup i pokažimo da tad mora biti $v\notin span(\mathcal{S})$.

$\mathcal{S}_{PROŠ}$ lin. nez. skup $\Rightarrow$ prema definiciji lin. nez. jedino rješenje jednačine $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_nu_n+\alpha_{n+1}v=0$ je trivij. rješ. $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_{n+1}=0$.

Ako bi pretpostavili da $v\in span(\mathcal{S})$ tada bi imali $v=\beta_1u_1+\beta_2u_2+\dots+\alpha_nu_n$ za neke $\beta_i\in\mathbb{R}$ $i=1,2,\dots,n$ tj. jedn. $\alpha_1u_1+\dots+\alpha_nu_n+\alpha_{n+1}v=0$ bi imala netrivijalno rješenje # kontradikcija.

Pretpostavka da $v\in span(\mathcal{S})$ nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome $v\notin span(\mathcal{S})$

(#) Neka je dat neprazan skup vektora $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^m$ ($S \subseteq \mathbb{R}^m$) i neka je $n > m$. Pokazati da tada S mora biti linearno zavisan skup.

Rj. Vektore iz skupa S postavimo kao kolone matrice A tj.

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}_{m \times n}.$$

Iz osnovne teorije linearne algebre znamo da

kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup akko $\ker(A) = \{0\}$

kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup akko $\mathrm{rang}(A) = n$

Pa npr. diskutujmo rang matrice A. Znamo da matrica A ima m redova pa ako je svedemo u red ešelon oblik rang matrice A može biti najviše $m < n$ tj.

$$\mathrm{rang}(A) \leq m < n \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mathrm{rang}(A) < n \Rightarrow$ kolone matrice A formiraju linearno zavisan skup

$\Rightarrow S$ je linearno zavisan skup

q.e.d.

<u>Dijagonalna dominacija</u> Za matricu $A_{n\times n}$ kažemo da je dijagonalno dominantna kadgod
$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \text{za svaki } i=1,2,\dots,n .$$
Tj. kada veličina svakog dijagonalnog elementa prevazilazi sumu veličina elemenata van glavne dijagonale u odgovarajućem redu.

(#) Neka je A dijagonalno dominantna matrica. Dokazati da je matrica A nesingularna.

Rj. A dijagonalno dominantna $\iff |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \forall i=1,2,\dots,n$

Iz osnovne teorije linearne algebre znamo da

A nesingularna $\iff$ kolone matrice A linearno nezav. ...(1)

kolone matr. A lin. nez. $\iff \ker(A)=\{0\}$ ...(2)

Mi sad želimo pokazati da je $\ker(A)=\{0\}$ ($\ker(A)=\{x \mid Ax=0\}$).
Pretpostavimo da $\exists x\neq 0$ t.d. $Ax=0$ (jasno $x\in\ker(A)$).
Neka je x oblika $x=(x_1,x_2,\dots,x_k,\dots,x_n)^T$ i neka je $|x_k|$ najveća vrijednost.

$$Ax=0 \iff \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_k\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

Nas zanima k-ta kolona od $Ax=0$ tj:

$$a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\dots+a_{kk}x_k+\dots+a_{kn}x_n=0$$

tj.
$$a_{kk}x_k = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} a_{kj}x_j$$

Sad imamo
$$|a_{kk}x_k| = \Big|-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} a_{kj}x_j\Big| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \underbrace{|a_{kj}x_j|}_{|a_{kj}||x_j|} \le |x_k| \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$$

Ako podjelimo sa $|x_k|$:
$$|a_{kk}| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}| \quad \# \text{ kontradikcija}$$
(sa činjen da je A dijag. dominantna)

Pretpostavka da $\exists x\neq 0$ t.d. $Ax=0$ nas vodi u kontradikciju pa nije tačno. Prema tome $\ker(A)=\{0\} \overset{(2)}{\implies}$ kol. mat. A lin. nez. $\overset{(1)}{\implies}$ A nesingularna q.e.d.

Vandermondove matrice Matrice oblika

$$V_{m\times n} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^{n-1} \end{pmatrix}$$

kod kojih je $x_i \neq x_j$ za sve $i \neq j$ zovemo Vandermondove matrice.

\# Objasniti zašto kolone Vandermondove matrice V konstruišu linearno nezavisan skup kadgod je $n \le m$.

Rj. Iz osnovne teorije Linearne algebre znamo da

kolone matrice A formiraju lin. nez. skup akko $\ker(A) = \{0\}$.

Pretpostavimo da $\exists$ vektor $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \neq 0$ takav da $V\alpha = 0$

(drugim riječima pretpostavili smo da je $\ker(A) \neq \{0\}$).

Homogeni sistem $V\alpha = 0$ možemo drugačije pisati

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1^2 + \dots + \alpha_{n-1} x_1^{n-1} = 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_{n-1} x_2^{n-1} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_m + \alpha_2 x_m^2 + \dots + \alpha_{n-1} x_m^{n-1} = 0 \end{matrix}$$

Ovo povlači da polinom

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1}$$

ima m različitih korijena (upravo x_i-ove)

\#kontradikcija

(prema fundamentalnoj teoremi algebre znamo da nenula polinom stepena $n-1$ može imati najviše $n-1$ različit korijen, a kod nas je $n \le m$)

Pretpostavka da $\exists\, \alpha \neq 0$ t.d. $V\alpha = 0$ nas vodi u kontradikciju pa nije tačna.

Prema tome $\ker(V) = \{0\} \iff$ kol. matr. V form. lin. nez. skup q.e.d.

(#) Dat je skup $\mathcal{S}$ od m tački $\mathcal{S} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)\}$ u kojem su svi od x_i-jeva različiti. Objasniti zašto postoji jedinstven polinom

$$g(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{m-1} x^{m-1}$$

stepena $m-1$ koji prolazi kroz svaku tačku u $\mathcal{S}$.

Rj. Šta znači da polinom $g(x)$ prolazi kroz svaku tačku u $\mathcal{S}$.
To znači da $g(x_i) = y_i$ za $\forall i = 1, 2, \dots, m$.
Drugim riječima

$$g(x_1) = y_1 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1^2 + \dots + \alpha_{m-1} x_m^{m-1}$$
$$g(x_2) = y_2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_{m-1} x_2^{m-1}$$
$$\vdots$$
$$g(x_m) = y_m = \alpha_0 + \alpha_1 x_m + \alpha_2 x_m^2 + \dots + \alpha_{m-1} x_m^{m-1}$$

Ovo je sistem od m linearnih jednačina sa m nepoznatih $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$. Sistem možemo napisati u obliku

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{m-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^{m-1} \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Primjetimo da je matrica koeficijenata A u stvari kvadratna Vandermondova matrica. Na osnovu prethodnog zadatka
A je nesingularna matrica, što $\Leftrightarrow$ znači $\exists A^{-1}$ a što $\Leftrightarrow$ znači da
$\exists$ jedinstveno rješenje [illegible] za $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{m-1} \end{pmatrix}$. Prema tome postoji jedinstven polinom $g(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{m-1} x^{m-1}$ stepen $m-1$ koji prolazi kroz svaku tačku u $\mathcal{S}$.

Napomena: Polinom $g(x)$ iz prethodnog zadatka mora biti u obliku

$$g(x)=\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i\,\frac{\prod_{j=1,\,j\neq i}^{m}(x-x_j)}{\prod_{j=1,\,j\neq i}^{m}(x_i-x_j)}\right)$$

Ovo možemo provjeriti tako što ćemo pokazati da je desna strana zaista polinom stepena $m-1$ koja prolazi kroz svaku tačku u $\mathcal{S}$. Polinom $g(x)$ je poznat pod imenom Lagranžov interpolacioni polinom stepena $m-1$.

(#) Dat je skup $\mathcal{S}=\{\sin x, \cos x, x\sin x\}$ u vektorskom prostoru V svih realno-vrijednosnih f-ja realne varijable. Da li je skup $\mathcal{S}$ linearno nezavisan skup?

Rj.

Prema definiciji linearne nezavisnosti skup $\mathcal{S}$ je linearno zavisan ako i samo ako postoje skalari α, β i γ, gdje je bar jedan različit od nule, takvi da homogena jednačina

$$\alpha \sin x + \beta \cos x + \gamma x \sin x = 0 \qquad \ldots (*)$$

vrijedi za sve x (za koje su f-je definisane).

$(x\sin x)' = \sin x + x\cos x$

Ako napravimo izvod date jednakosti imamo

$$\alpha \cos x - \beta \sin x + \gamma(\sin x + x\cos x) = 0 \quad /'$$

$$-\alpha \sin x - \beta \cos x + \gamma(\cos x + \cos x - x\sin x) = 0.$$

Prema tome koeficijenti α, β i γ koji zadovoljavaju $(*)$ moraju zadovoljavati i sistem

$$\begin{pmatrix} \sin x & \cos x & x\sin x \\ \cos x & -\sin x & \sin x + x\cos x \\ -\sin x & -\cos x & 2\cos x - x\sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

za svako x. Ako za x stavimo $x=0$ imamo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a rješenje ovog sistema je $\alpha=\beta=\gamma=0$. Prema tome jedine konstante α, β i γ za koje vrijedi

$$\alpha \sin x + \beta \cos x + \gamma x \sin x = 0 \quad \text{za } \forall x$$

su $\alpha=\beta=\gamma=0$ pa je $\mathcal{S}$ linearno nezavisan skup.

q.e.d.

(#) Neka je V vektorski prostor realno-vrijednosnih f-ja realne varijable, i neka je $\mathcal{S}=\{1, x, x^2, x^3\}$ dati skup f-ja. Pokazati da je $\mathcal{S}$ linearno nezavisan skup.

R. Skup f-ja $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ je prema definiciji linearno nezavisan akko jednačina

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) = 0$$

za svako x ima zajedničko rješenje jedino trivijalno rješenje $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$.

Ako postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ne svi jednaki nuli takvi da

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) = 0.$$

za svako x, tada je skup $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ linearno zavisan.

Pa posmatrajmo jednačinu

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 = 0$$

Sve f-je su diferencijabilne, pa ako nađemo izvod imamo

$$\alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2 = 0 \quad /'$$

$$2\alpha_3 + 6\alpha_4 x = 0 \quad /'$$

$$6\alpha_4 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_4 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

Prema tome jedino zajedničko rješenje jednačine

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 = 0 \quad \text{za } \forall x$$

je trivijalno rješenje $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$.

Skup $\mathcal{S}$ je linearno nezavisan skup.

<u>Wronski matrica</u>: Neka je V vektorski prostor realno-vrijednosnih f-ja realne varijable, i neka je $\varphi = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ skup svih f-ja koje su $n-1$ puta diferencijabilne.
Wronski matrica je definisana sa

$$W(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Ako postoji najmanje jedna tačka $x=x_0$ takva da je Wronski matrica $W(x_0)$ nesingularna, dokazati da tada $\varphi = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ mora biti linearno nezavisan skup.

Rj. Prema definiciji linearne zavisnosti skup f-ja $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ je linearno zavisan akko postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, ne svi jednaki nuli takvi da vrijedi homogena jednačina

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) = 0 \qquad \dots (*)$$

za svako x. Pa posmatrajmo jednačinu $(*)$ u kojoj su $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ nepoznate.

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) = 0 \qquad /'$$
$$\alpha_1 f_1'(x) + \alpha_2 f_2'(x) + \dots + \alpha_n f_n'(x) = 0 \qquad /'$$
$$\vdots$$
$$\alpha_1 f_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2 f_2^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_n f_n^{(n-1)}(x) = 0$$

Prema tome konstante $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ koje zadovoljavaju $(*)$ moraju zadovoljavati i sistem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}}_{W(x)} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

za svako x.

Ako u dobijeni sistem stavimo tačku $x=x_0$ imamo

$$W(x_0)\cdot v = 0$$

gdje je $v=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$.

Iz osnovne teorije Linearne algebre znamo da

$\ker(A)=\{0\}$ akko A nesingularna matrica

Prema tome $\ker(W(x_0))=\{0\}$ zato što je $W(x_0)$ nesingularna matrica, pa je $v=0$.
Prema tome jedino rješenje za α u $(*)$ je trivijalno rješenje $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n$ što osigurava linearnu nezavisnost skupa φ.

Zadaci za vježbu

1. Ako je $A_{m\times n}$ takva matrica da $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0$ za svako $i = 1, 2, \dots, n$ (tj. suma svake kolone je 0), objasniti zašto su kolone od A linearno zavisan skup, pa prema tome $\operatorname{rang}(A) < n$.

2. Ako je $\mathcal{S} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ linearno nezavisan skup u $\mathbb{R}^m$ i ako je $P_{m\times m}$ nesingularna matrica, objasniti zašto skup

$$P(\mathcal{S}) = \{Pu_1, Pu_2, \dots, Pu_n\}$$

mora biti linearno nezavisan skup. Da li je isti rezultat tačan i u slučaju kada je P singularna matrica.

3. Pretpostavimo da je $\mathcal{S} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ skup vektora iz $\mathbb{R}^m$. Dokazati da je $\mathcal{S}$ linearno nezavisan skup ako i samo ako je skup $\mathcal{S}' = \left\{u_1, \sum_{i=1}^{2} u_i, \sum_{i=1}^{3} u_i, \dots, \sum_{i=1}^{n} u_i\right\}$ linearno nezavisan.

4. Koji od sljedećih skupova f-ja su linearno nezavisni?

(a) $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$

(b) $\{\sin^2 x, \cos^2 x, \cos 2x\}$